Математические заметки

том 51 выпуск 3 март 1992

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ КОВЫПУКЛОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

К. А. Копотун

1. В работе рассматривается вопрос ковыпуклой аппроксимации многочленами функций с ухудшающейся гладкостью на концах отрезка. Обозначим $\hat{W}^r$ — класс непрерывных на $[-1, 1]$ функций f, имеющих на $(-1, 1)$ локально абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную и таких, что

$$|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}|\leqslant 1 \tag{0.1}$$

почти при всех $x\in[-1, 1]$.

Для $r\geqslant 3$ доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $r\in\mathbf{N}$, $r\neq 4$, $I:=[-1, 1]$. Если функция $f=f(x)$ выпукла на I и $f\in\hat{W}^r$, то для каждого натурального $n\geqslant r-1$ найдется выпуклый на I алгебраический многочлен $P_n=P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, что*

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant Cn^{-r},\ C=C(r)=\mathrm{const},\ x\in I. \tag{0.2}$$

Соответствующая теорема для аппроксимации без ограничений была доказана Z. Ditzian и V. Totik [1, с. 40—41, 79—83] (см. также В. К. Дзядык [2, гл. IX]). Для комонотонной аппроксимации аналогичная теорема для $r=1, 2$ следует из работы D. Leviatan [3], а для $r\geqslant 3$ — доказана Г. А. Дзюбенко, В. В. Листопадом, И. А. Шевчуком [4] с использованием метода из [5], модификация которого применена и в настоящей работе. Для $r=1, 2$ теорема 1 также следует из работы D. Leviatan [3]. Из теоремы 2 вытекает, что теорема 1 в отличие от соответствующих теорем для аппроксимации без ограничений и комонотонной аппроксимации, верна не для всех r. А именно, она не верна для $r=4$.

ТЕОРЕМА 2. $\forall n\in\mathbf{N}$ $\forall C\in\mathbf{R}$, $\exists f\in\hat{W}^4$, $f''(x)\geqslant 0$, $x\in I$: $\forall P_n$, $P_n''(x)\geqslant 0$, $x\in I$ $\exists x_0\in I$: $|f(x_0)-P_n(x_0)|>C$.

Воспользуемся обозначениями из [5]:

$L(x, g, [a, b])$ — многочлен Лагранжа степени $\leqslant r-3$, интерполирующий функцию g в точках $a+i(b-a)/(r-3)$, $i=\overline{0, r-3}$, $r>3$;

$$\Delta_n(y):=n^{-2}+\sqrt{1-y^2}n^{-1},\ y\in I;\ \Delta:=\Delta_n(x),\ x\in I;$$

$x_j := \cos(j\pi/n),\ j=\overline{0,n}$;

$\bar{x}_j := \cos(j\pi/n-\pi/2n),\ j=\overline{1,n}$;

$x_j^0 := \cos(j\pi/n-\pi/4n),\ j<n/2$;

$x_j^0 := \cos(j\pi/n-3\pi/4n),\quad j\geqslant n/2$;

$I_j := [x_j, x_{j-1}],\ h_j := x_{j-1}-x_j,\ j=\overline{1,n}$;

$t_{j,n} := (x-x_j^0)^{-2}\cos^2 2n\arccos x+(x-\bar{x}_j)^{-2}\sin^2 2n\arccos x$

— алгебраический многочлен степени $\leqslant 4n-2$;

$$T_j(x) := \int_{-1}^{x} t_{j,n}^{3r}(y)\,dy\left(\int_{-1}^{1} t_{j,n}^{3r}(y)\,dy\right)^{-1},$$

$$\mathbf{T}_j(x) := \int_{-1}^{x}(y-x_j)(x_{j-1}-y)\,t_{j,n}^{3r+1}(y)\,dy$$

$$\cdot\left(\int_{-1}^{1}(y-x_j)(x_{j-1}-y)\,t_{j,n}^{3r+1}(y)\,dy\right)^{-1}$$

— многочлены степени $\leqslant 6r(2n-1)+1$ и $\leqslant 2(3r+1)(2n+1)$ соответственно;

$$J_{n,r}(t)=(\sin nt/2/\sin t/2)^{28r}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\sin nt/2/\sin t/2)^{28r}\,dt\right)^{-1}$$

— ядро типа Джексона:

$$\mathcal{D}_n(y,x)=\frac{1}{(28r-1)!}\,\frac{\partial^{28r}}{\partial x^{28r}}(x-y)^{28r-1}\int_{\arccos x-\alpha}^{\arccos x+\alpha} J_{n,r}(t)\,dt$$

— многочленное ядро типа Дзядыка, в котором $\alpha=\arccos y$; $x,\ y\in I$. C, C_i — положительные числа, зависящие только от r.

Без специальных оговорок будут использованы неравенства:

$\Delta_n^2(y)\leqslant 4\Delta(|x-y|+\Delta),\ x\in I,\ y\in I$;

$2(|x-y|+\Delta)>|x-y|+\Delta_n(y)>(|x-y|+\Delta)/2$;

$h_{j\pm1}<3h_j$; $\Delta<h_j<5\Delta$ при $x\in I_j$.

В следующем пункте в предложении 2 и леммах 3–7 считаем $r\geqslant 5$.

2. Вспомогательные предложения и определения. Аналогично доказательству леммы 6 из [6, с. 17–19], несложно проверить справедливость оценок

$1-x_{j-1}<\int_{-1}^{1}\mathbf{T}_j(x)\,dx<1-x_j$;

$1-x_{j-1}<\int_{-1}^{1}T_j(x)\,dx<1-x_j,\qquad j=\overline{1,n}$.

Отсюда следует, что существуют числа $\alpha=\alpha(j)\in(0,\ 1)$, $\beta=\beta(j)\in(0,\ 1)$ такие, что для многочленов

$\boldsymbol{\sigma}_j(x) := \int_{-1}^{x}(\alpha\mathbf{T}_j(y)+(1-\alpha)\mathbf{T}_{j+1}(y))\,dy$,

$\sigma_j(x) := \int_{-1}^{x}(\beta T_j(y)+(1-\beta)T_{j+1}(y))\,dy,\ j=\overline{1,n-1}$.

имеют место равенства

$$\tilde{\sigma}_j(1)=\sigma_j(1)=1-x_j \tag{1.1}$$

(подобное рассуждение применено в доказательстве теоремы из [7]).

Для краткости обозначим $\tau_j:=h_j(|x-x_j|+h_j)^{-1}$. Положим $\chi_j(x):=0$, если $x\leqslant x_j$, и $\chi_j(x):=1$, если $x>x_j$; $(x-x_j)_+:=\int_{-1}^{x}\chi_j(t)\,dt$.

Предложение 1. *Справедливы оценки:*

$$0<-\tilde{\sigma}_j''(x)\leqslant C_1h_j^{-1}\tau_j^{6r},\ x\in I_j\cup I_{j+1}, \tag{1.2}$$

$$|\tilde{\sigma}_j''(x)|\leqslant C_1h_j^{-1}\tau_j^{6r},\ x\in I, \tag{1.3}$$

$$|(x-x_j)_+-\tilde{\sigma}_j(x)|\leqslant C_1h_j\tau_j^{6r-2},\ x\in I, \tag{1.4}$$

$$C_2h_j^{-1}\tau_j^{6r}\leqslant\sigma_j''(x)\leqslant C_1h_j^{-1}\tau_j^{6r},\ x\in I, \tag{1.5}$$

$$|(x-x_j)_+-\sigma_j(x)|\leqslant C_1h_j\tau_j^{6r-2},\ x\in I. \tag{1.6}$$

Предложение 1 доказывается аналогично лемме 6 из [6] с учетом равенств (1.1) и неравенства $h_{j+1}^{-1}\tau_{j+1}^{6r}<3^{12r-1}h_j^{-1}\tau_j^{6r}$, $x\in I$.

ЛЕММА 1. *Пусть множество E состоит из каких-нибудь отрезков I_{j_i}. Многочлен*

$$\bar{Q}_n(x,E):=n^{-r}\sum_{i\in\{i\}}h_{j_i}^{-1}(\sigma_{j_i}(x)-\tilde{\sigma}_{j_i}(x))$$

степени $\leqslant 2(3r+1)(2n+1)$, в котором $\{i\}:=\{i\,|\,I_{j_i}\in E,\ I_{j_i+1}\in E\}$, удовлетворяет неравенствам

$$|\bar{Q}_n(x,E)|\leqslant C_3n^{-r},\quad x\in I,$$

$$\bar{Q}_n''(x,E)\geqslant -C_4\Delta^{-2}n^{-r},\ x\in E,$$

$$\bar{Q}_n''(x,E)\geqslant C_5\Delta^{-2}n^{-r}(\Delta/(\mathrm{dist}(x,\tilde{\tilde{E}})+\Delta))^{12r-2},\ x\in I\setminus E,$$

где $\tilde{\tilde{E}}:=E\setminus\{I_{j_i}\,|\,I_{j_i\pm1}\in E\}$.

Доказательство. Из неравенств (1.4) и (1.6) следует оценка

$$|\bar{Q}_n(x,E)|\leqslant n^{-r}\sum_i 2C_1\tau_{j_i}^{6r-2},$$

откуда

$$|\bar{Q}_n(x,E)|\leqslant 2C_1n^{-r}\sum_{j=1}^{n}\tau_j^{6r-2}\leqslant$$

$$\leqslant C_1n^{-r}2^{12r}5^{9r}\Delta^{3r-1,5}\int_{-1}^{1}(|x-t|+\Delta)^{-3r+0,5}\,dt\leqslant C_3n^{-r},\quad x\in I.$$

Из неравенств (1.2), (1.3) и (1.5) – оценка

$$\bar{Q}_n''(x,E)\geqslant -n^{-r}\sum_i\tilde{\sigma}_{j_i}''(x)h_{j_i}^{-1}\geqslant -n^{-r}h_{j'}^{-1}(|\tilde{\sigma}_{j'}''(x)|+3|\tilde{\sigma}_{j'-1}''(x)|),$$

где индекс j^* выбран так, чтобы $x\in I_{j^*}$, т. е. $\bar{Q}_n''(x,E)\geqslant -C_4\Delta^{-2}n^{-r}$, $x\in E$. Наконец, из (1.2) и (1.5) вытекает, что

$$\bar{Q}_n''(x,E)\geqslant C_2n^{-r}\sum_j h_j^{-2}\tau_j^{6r}\geqslant C_2n^{-r}h_{j^*}^{-2}\tau_{j^*}^{6}\geqslant$$

$$\geqslant C_5\Delta^{-2}n^{-r}(\Delta/(\operatorname{dist}(x,\tilde{\tilde{E}})+\Delta))^{12r-2},\qquad x\in I\setminus E,$$

где j^* выбран так, что I_{j^*} — ближайший к x отрезок из $\tilde{\tilde{E}}$, т. е. $\operatorname{dist}(x,\tilde{\tilde{E}})=\operatorname{dist}(x,I_{j^*})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* $0\leqslant g''(x)\leqslant n^{-r}\Delta^{-2}$, $x\in I$, *тогда многочлен*

$$R_n(x,g):=\sum_{j=1}^{n-1}[x_{j+1},x_j,x_{j-1};g](x_{j-1}-x_{j+1})\sigma_j(x)+$$
$$+g(x_{n-1})+[x_n,x_{n-1};g](x-x_{n-1})$$

степени $\leqslant 6r(2n-1)+2$ *выпуклый на* I, *и при этом*

$$|g(x)-R_n(x,g)|\leqslant C_6n^{-r},\ x\in I. \tag{1.7}$$

Доказательство. Поскольку функция g — выпукла, то $[x_{j+1},x_j,x_{j-1};g]\geqslant 0$, поэтому с учетом (1.5) многочлен $R_n(x,g)$ — выпуклый. Докажем неравенство (1.7). По формуле Лагранжа

$$|[x_{j+1},x_j,x_{j-1};g]|=\frac{1}{2}|g''(\theta)|\leqslant 113n^{-r}h_j^{-2},$$

$$\theta\in[x_{j+1},x_{j-1}];$$

$$|[x_i,x,x_{i-1};g]|\leqslant 13n^{-r}h_i^{-2},\ x\in I_i.$$

Откуда, используя (1.6), для $x\in(x_i,x_{i-1}]$ получаем

$$|g(x)-R_n(x,g)|=|[x_i,x,x_{i-1};g](x-x_i)(x-x_{i-1})+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}[x_{j+1},x_j,x_{j-1};g](x_{j-1}-x_{j+1})((x-x_j)_+-\sigma_j(x))|\leqslant$$
$$\leqslant 13n^{-r}+\sum_{j=1}^{n-1}113n^{-r}h_j^{-2}4h_jC_1h_j\tau_j^{6r-2}\leqslant C_6n^{-r},\qquad x\in I.$$

Лемма доказана

Для функции $g=g(x)$, имеющей на $[-1,1]$ вторую производную, обозначим

$$\mathcal{L}(x,q):=g(-1)+g'(-1)(x+1)+\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t}L(y,g'',I)\,dy\,dt,$$

$$L(x,y):=g(x)+g'(x)(y-x)+\int_x^y\int_x^t L(t,g'',[x,x+\Delta])\,dt\,dz.$$

Предложение 2. *Если* $g\in\tilde{W}^r$, *то справедливы неравенства*
1) $|g(x)-\mathcal{L}(x,g)|\leqslant C_7$, $x\in I$;
2) $|g(y)-L(x,y)|\leqslant C_8n^{-r}(|x-y|+\Delta)^{2r}\Delta^{-2r}$, $[x,x+\Delta]\subset I$, $y\in I$.

Доказательство. 1) Пусть $y_i:=-1+2i/(r-3)$, $i=\overline{0,r-3}$.

Тогда

$$|g(x)-\mathscr{L}(x,g)|\leqslant$$

$$\times\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t}|(y-y_0)\ldots(y-y_{r-3})|\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-3}}(1+$$

$$+(y_0+(y_1-y_0)t_1+\ldots+(y-y_{r-3})t_{r-2}))^{-r/2}\,dt_{r-2}\ldots dt_1\,dy\,dt+$$

$$+\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t}|(y-y_0)\ldots|\int_0^1\ldots\int_0^{t_{r-3}}(1-$$

$$-(y_0+\ldots+(y-y_{r-3})t_{r-2}))^{-r/2}\,dt_{r-2}\ldots dt=:\mathscr{J}_1+\mathscr{J}_2.$$

Докажем ограниченность, например, первого интеграла. Положим $g_r(t)=(1+t)^{r/2-2}$, если r— нечетное, и $g_r(t)=(1+t)^{r/2-2}\ln(1+t)$, если r – четное, тогда $g_r^{(r-2)}(t)=C_9(1+t)^{-r/2}$. Имеем

$$\mathscr{J}_1\leqslant C_9^{-1}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t}|(y-y_0)\ldots(y-y_{r-3})|\int_0^1\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{r-3}}g_r^{(r-2)}(y_0+\ldots+(y-y_{r-3})t_{r-2})\,dt_{r-2}\ldots dt=$$

$$=C_9^{-1}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t}|g_r(y)-L(y,g_r,I)|\,dy\,dt\leqslant C_{10},$$

так как оценка $|g_r(y)-L(y,g_r,I)|\leqslant C_9^*$, $y\in I$ следует из [2, с. 159–161].

2) Зафиксируем $x\in I$, обозначим $\bar{y}_i:=x+\Delta i/(r-3)$, $i=\overline{0,\ r-3}$. Тогда

$$|g(y)-L(x,y)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_x^y\int_x^z|(t-\bar{y}_0)\ldots(t-\bar{y}_{r-3})|\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{r-3}}(1-(\bar{y}_0+(\bar{y}_1-\bar{y}_0)t_1+\ldots+(t-\bar{y}_{r-3})t_{r-2})^2)^{-r/2}\,dt_{r-2}\ldots$$

$$\ldots dt\,dz=:G(y).$$

Рассмотрим три случая.

a) $-1+n^{-2}\leqslant x$, $x+\Delta\leqslant 1-n^{-2}$, $-1+n^{-2}\leqslant y\leqslant 1-n^{-2}$, тогда $2\sqrt{1-x^2}>n\Delta$, $16\sqrt{1-y^2}>n\Delta^2/(|x-y|+\Delta)$.

$$G(y)\leqslant C\left(\frac{|x-y|+\Delta}{n\Delta^2}\right)^r(|x-y|+\Delta)^{r-2}|x-y|^2\leqslant$$

$$\leqslant C_8n^{-r}\left(\frac{|x-y|+\Delta}{\Delta}\right)^{2r}$$

b) Пусть $xy>0$. Рассмотрим случай $x\in[-1,0)$, $y\in[-1,0)$ ($x\in[0,1]$ доказывается аналогично). Обозначим $x^*=\min\{x,y\}$, $y^*=\max\{x,y\}$. С учетом a) рассмотрим только случай $x^*<-1+n^{-2}$. Аналогично 1) имеем следующую оценку:

$$G(y)\leqslant C\int_x^y\int_x^z|\tilde{g}_r(t)-L(t,\tilde{g}_r,[x,x+\Delta])\,dt\,dz,$$

где $\tilde{g}_r(t)=(1+t)^{r/2-2}$, если r – нечетное, и $\tilde{g}_r(t)=(1+t)^{r/2-2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1+y^*}\right)$, если r — четное. Заметим, что $|\bar{g}_r(t)|\leqslant(1+y^*)^{r/2-2}$, $t\in[-1, y^*]$. Тогда

$$G(y)\leqslant C\int_x^y\int_x^z(1+y^*)^{r/2-2}\left(1+C\left(\frac{|x-y|+\Delta}{\Delta}\right)^{r-3}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\leqslant C(|x-y|+\Delta)^{r/2}\left(\frac{|x-y|+\Delta}{\Delta}\right)^{r-3}\leqslant C_8n^{-r}\left(\frac{|x-y|+\Delta}{\Delta}\right)^{2r}.$$

c) Для остальных случаев $C\leqslant n^{-r}(|x-y|+\Delta)^{2r}\Delta^{-2r}$, а оценка $G(y)\leqslant C$ доказывается аналогично 1). Предложение доказано.

ЛЕММА 3. *Пусть задана функция $\Phi\ni W^r$ и множество $F\subset I$. Если $\Phi''(x)=0$ при $x\in F$, то многочлен*

$$D_n(x,\Phi):=\int_{-1}^1(\Phi(y)-\mathscr{L}(y,\Phi))\mathscr{D}_n(y,x)\mathrm{d}y+\mathscr{L}(x,\Phi)$$

степени $\leqslant 14r(n-1)$ приближает функцию Φ и производные так, что

$$|\Phi^{(p)}(x)-D_n^{(p)}(x,\Phi)|\leqslant C_{11}\Delta^{-p}n^{-r}\left(\frac{\Delta}{\Delta+\operatorname{dist}(x,I\setminus F)}\right)^{12r-2}, \qquad (1.8)$$

$x\in I$, $p=0\vee1\vee2$.

Доказательство. Обозначим $g(x):=\Phi(x)-\mathscr{L}(x,\Phi)$. Из предложения 2 следует, что $|g(x)|\leqslant C_7$, $x\in I$. Для удобства считаем, что $x+\Delta\in I$, x — фиксировано. Так же, как и в лемме 3 из [6], сведем доказательство неравенства (1.8) к оценке интеграла

$$\mathscr{J}=\int_{-1}^1(L(x,y)-g(y))\frac{\partial^p}{\partial x^p}\mathscr{D}_n(y,x)\mathrm{d}y.$$

Теперь, используя предложение 2 и утверждение 1 из [5], получаем

$$|\mathscr{J}|\leqslant\int_{-1}^1|L(x,y)-g(y)|C_{12}\Delta^{14r-2-p}(|x-y|+\Delta)^{-14r+1}\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\leqslant C_8C_{12}n^{-r}\int_{-1}^1\Delta^{12r-2-p}(|x-y|+\Delta)^{-12r+1}\mathrm{d}y\leqslant C_{11}n^{-r}\Delta^{-p},$$

т. е. неравенство (1.8) в случае $x\in F$ доказано.

В случае $[x,x+\Delta]\subset F$ многочлен $L(x,y)$ совпадает с $g(y)$ при $y\in F$. Поэтому если $x\in F$, то, для удобства считая $[x,x+\Delta]\subset F$, имеем

$$|\mathscr{J}|\leqslant\int_{I\setminus F}C_8C_{12}n^{-r}\Delta^{12r-2-p}(|x-y|+\Delta)^{-12r+1}\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\leqslant 2C_8C_{12}n^{-r}\Delta^{12r-2-p}\int_{\operatorname{dist}(x,\,I\setminus F)}^{+\infty}(t+\Delta)^{-12r+1}\mathrm{d}t\leqslant C_{11}\frac{n^{-r}\Delta^{12r-2-p}}{(\Delta+\operatorname{dist})^{12r-2}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть задана функция $g\in W^r$ и множество $\mathscr{Y}_j$, состоящее из $2r-5$ соседних отрезков I_j, т. е.*

$$\mathscr{Y}_j=I_j\cup I_{j+1}\cup\ldots\cup I_{j+2(r-3)}.$$

Если при каждом $i=\overline{0,\,2r-6}$ найдется точка $\tilde{x}_i\in I_{j+i}$, в которой $|g''(\tilde{x}_i)|\leqslant n^{-r}\Delta_n^{-2}(\tilde{x}_i)$, то $|g''(x)|\leqslant C_{13}n^{-r}\Delta^{-2}$ и при всех $x\in\mathscr{Y}_j$.

Доказательство. Пусть $l(x, g'', \tilde{x}_{2p})$ — многочлен Лагранжа степени $\leqslant r-3$, интерполирующий g'' в точках $\tilde{x}_{2p}$, $p=\overline{0, r-3}$. Производную g'' представим в виде

$$g''(x) = [g''(x) - L(x, g'', \mathcal{Y}_j)] - l(x, g'' - L, \tilde{x}_{2p}) + l(x, g'', \tilde{x}_{2p}).$$

Оценим последнее слагаемое

$$|l(x, g'', \tilde{x}_{2p})| = \left|\sum_{p=0}^{r-3} g''(\tilde{x}_{2p}) \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant r-3,\\ i\neq p}} \frac{x - \tilde{x}_{2i}}{\tilde{x}_{2p} - \tilde{x}_{2i}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 3^{2r} \sum_{l=0}^{r-3} n^{-r} \Delta_n^{-2}(\tilde{x}_{2p}) \leqslant C_{14} n^{-r} \Delta^{-2}.$$

Необходимая оценка второго слагаемого $l(x, g'' - L, \tilde{x}_{2p})$ следует из доказанного выше и оценки $|g''(x) - L(x, g'', \mathcal{Y}_j)| \leqslant C_{15} n^{-r} \Delta^{-2}$, вытекающей из доказательства предложения 2. Лемма доказана.

Пусть функция $f=f(x)$ выпукла на I и $f\in \tilde{W}^r$.

Определение 1. Отрезок I_j назовем отрезком I типа, если при всех $x\in I_j$ $f''(x) \leqslant C_{13}(C_4+C_5) n^{-r}\Delta^{-2}$; отрезком II типа, если он не является отрезком I типа и при всех $x\in I_j$ $f''(x) \geqslant (C_4+C_5)\cdot n^{-r}\Delta^{-2}$. Остальные отрезки I_j назовем отрезками III типа. Объединение всех отрезков первого типа обозначим E_1, второго — E_2 и третьего — E_3.

ЛЕММА 5. *Соседних отрезков третьего типа не может быть больше, чем $(2r-6)$, т. е. каждое из множеств $\mathcal{Y}_j$, $j=\overline{0, n-2r+6}$, содержит по крайней мере один отрезок I_i не третьего типа.*

Лемма 5 следует из леммы 4.

Представим множество $E_1 \cup E_3 \cup \{I_j \in E_2 | \ I_{j\pm 1} \in E_2\}$ в виде конечного объединения непересекающихся отрезков. Обозначим G_1 множество, состоящее из всех тех отрезков, которые содержат не менее $(4r-8)$ отрезков I_j.

Итак, $G_1 = [x_{j_1}, x_{j_2}] \cup [x_{j_3}, x_{j_4}] \cup \ldots$; $0 \leqslant j_\nu < j_{\nu+1} \leqslant n$. Обозначим $\bar{j}_\nu := j_\nu + (1+(-1)^\nu)/2$. Если $|x_{j_\nu}| = 1$, то положим $S_\nu(x) := 1$, если же $|x_{j_\nu}| \neq 1$, то положим

$$S_\nu(x) := \int_x^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{j_\nu})^{r-2} (x_{j_\nu} - y)^{r-2} dy \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{\bar{x}_{j_\nu}}^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{j_\nu})^{r-2} (x_{j_\nu} - y)^{r-2} dy\right)^{-1}.$$

Определение 2. Положим $g_1(x) := 0$ при $x \in G_1$; $g_1(x) := f''(x) S_\nu(x)$ при $x \in [\bar{x}_{j_\nu}, x_{j_\nu}]$; $g_1(x) := f''(x)$ в остальных случаях; $g_2(x) := f''(x) - g_1(x)$. Обозначим

$$f_1(x) := f(-1) + f'(-1)(x+1) + \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} g_1(y)\, dy\, dt;$$

$$f_2(x) := \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} g_2(y)\, dy\, dt.$$

Очевидно, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

ЛЕММА 6. *Функции g_1 и g_2 неотрицательны, и справедливы неравенства*

$$|g_1(x)| \leqslant C_{16} n^{-r} \Delta^{-2}, \quad x \in I;$$

$$|g_2^{(r-2)}(x) (1-x^2)^{r/2}| \leqslant C_{17}, \quad x \in I. \qquad (1.9)$$

Доказательство. Неотрицательность функций g_1 и g_2 очевидна. Первое из неравенств (1.9) следует из оценки $|S_\nu(x)|\leqslant 1$ и неравенства $|f''(x)|\leqslant Cn^{-r}\Delta^{-2}$, $x\in G_1$, которое доказывается аналогично лемме 4 с учетом леммы 5.

Теперь докажем неравенство

$$|g_1^{(r-2)}(x)(1-x^2)^{r/2}|\leqslant C_{18},\qquad x\in I. \tag{1.10}$$

Зафиксируем точку $x\in I$. Если $g_1(x)=0$ или $g_1(x)=f''(x)$, то неравенство (1.10) очевидно. Таким образом, достаточно доказать его для $x\in[\bar{x}_{j_\nu}, x_{j_\nu}]$, $|x_{j_\nu}|\neq 1$. Из того, что отрезок $[\bar{x}_{j_\nu}, x_{j_\nu}]$ не содержит ± 1, вытекает неравенство $|f^{(r)}(x)|\leqslant 2^r n^{-r}\Delta^{-r}$. Отсюда, учитывая оценку $|f''(x)|\leqslant Cn^{-r}\Delta^{-2}$, $x\in G_1$, с помощью неравенств типа Колмогорова получаем $|f^{(j+2)}(x)|\leqslant C_{19}n^{-r}\Delta^{-(j+2)}$, $j=\overline{0, r-2}$. Используя неравенство $|S_\nu^{(k)}(x)|\leqslant C_{20}\Delta^{-k}$, $k=\overline{0, r-2}$, имеем

$$|g_1^{(r-2)}(x)|=\left|\sum_{j=0}^{r-2}\binom{r-2}{j}f^{(j+r)}(x)S_\nu^{(r-2-j)}(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_{19}C_{20}n^{-r}\Delta^{-r}\sum_{j=0}^{r-2}\binom{r-2}{j}\leqslant C_{18}(1-x^2)^{-r/2}.$$

Второе из неравенств (1.9) следует из (0.1) и (1.10) с $C_{17}=C_{18}+1$. Лемма доказана.

Обозначим $G_2:=\{x|\operatorname{dist}(x, \bar{E}_2)\leqslant 3^{4r}\Delta\}$, где $\bar{E}_2:=\{\bar{I}_j|\ I\in E_2,\ \bar{I}_j\equiv G_1\}$. Из леммы 5 и определения 2 вытекает, что $g_2(x)=0$ при $x\in I\setminus G_2$.

Заметим, что при $n_1\geqslant n$ имеет место неравенство

$$\Delta_{n_1}(x)(\operatorname{dist}(x, G_2)+\Delta_{n_1}(x))^{-1}\leqslant C_{21}\Delta(\operatorname{dist}(x, \bar{E}_2)+\Delta)^{-1}.$$

Из лемм 3, 6 и определений 1 и 2 вытекает

ЛЕММА 7. *При каждом натуральном $n_1\geqslant n$ многочлен $D_{n_1}(x, f_2)$ степени $<14rn_1$ имеет свойства*

$$|f_2(x)-D_{n_1}(x, f_2)|\leqslant C_{22}n^{-r},\quad x\in I,$$
$$D_{n_1}''(x, f_2)\geqslant -C_{23}n_1^{-r}\Delta_{n_1}^{-2}(x)\left(\frac{\Delta}{\operatorname{dist}(x, \bar{E}_2)+\Delta}\right)^{12r-2},\qquad x\in I\setminus\bar{E}_2.$$
$$D_{n_1}''(x, f_2)\leqslant(C_4+C_5)n^{-r}\Delta^{-r}-C_{23}n_1^{-r}\Delta_{n_1}^{-2}(x),\quad x\in\bar{E}_2,$$

где $C_{22}=C_{11}C_{17}$, $C_{23}=C_{11}C_{17}C_{21}^{12r-2}$.

3. Доказательство теоремы 1 для случая $r\geqslant 5$. Пусть $n_1\in\mathbb{N}$, $n_1\geqslant n$. Обозначим $P_{n_1}(x):=\bar{Q}_n(x, \bar{E}_2)+D_{n_1}(x, f_2)+R_n(x, f_1)$ многочлен степени $<14rn_1$. Из лемм 1, 2, 6, 7 вытекают оценки

$$|f(x)-P_{n_1}(x)|\leqslant(C_{22}+C_6C_{16}+C_3)n^{-r}=C_{24}n^{-r},\quad x\in I,$$
$$P_{n_1}''(x)\geqslant C_5n^{-r}\Delta^{-2}-C_{23}\Delta_{n_1}^{-2}(x)n_1^{-r},\quad x\in\bar{E}_2,$$
$$P_{n_1}''(x)\geqslant(3^{-50r^2}C_5n^{-r}\Delta^{-2}-C_{23}n_1^{-r}\Delta_{n_1}^{-2}(x))\left(\frac{\Delta}{\operatorname{dist}(x, \bar{E}_2)+\Delta}\right)^{12r-2},$$
$$x\in I\setminus\bar{E}_2.$$

Осталось выбрать n_1 таким, чтобы выполнялось неравенство

$$C_5 n^{-r}\Delta^{-2} > 3^{50r^2} C_{23} n_1^{-r}\Delta_{n_1}^{-2}(x).$$

Для этого достаточно взять $n_1 = [[3^{51r^2}C_{23}C_5^{-1}]^{1/(r-4)}+1]\,n$.

Итак, для $n > [(3^{51r^2}C_{23}C_5^{-1})^{1/(r-4)}+1]\,r = C_{24}$ теорема доказана. Случай $r-1 \leqslant n \leqslant C_{24}$ следует из случая $n=r-1$, для доказательства которого достаточно положить $P_n(x) := \mathscr{L}(x,f) + \dfrac{2C_9^*}{C_9}x^2$.

4. Вспомогательные утверждения и доказательство теоремы 1 для $r=3$. Особенность случая $r=3$ заключается в том, что вторая производная функции $f \in \mathring{W}^3$ f'', вообще говоря, может не существовать на концах отрезка I. С учетом этого обстоятельства несложно доказать следующие аналоги предложения 2 и лемм 2–7 из п. 2 при $r=3$.

ЛЕММА 2$'$. *Пусть $g \in \mathring{W}^3$; $g''(x) \geqslant 0$, $x \in I$; $g''(x) \leqslant n^{-3}\Delta^{-2}$, $x \in I \setminus (I_1 \cup I_n)$. Тогда многочлен $R_n(x,g)$ выпуклый на I, и при этом $|g(x) - R_n(x,g)| \leqslant \tilde{C}_6 n^{-3}$.*

Обозначим

$$\tilde{\mathscr{L}}(x,g) := g(-1) + g'(-1)(x+1) + g''(0)(x+1)^2/2,$$

$$\tilde{L}(x,y) := g(x) + g'(x)(y-x) + g''(x+\Delta/2)(y-x)^2/2.$$

Заметим, что для $g \in \mathring{W}^3$ предложение 2 выполняется, если функции $\mathscr{L}(x,g)$ и $L(x,y)$ заменить на $\tilde{\mathscr{L}}(x,g)$ и $\tilde{L}(x,y)$.

ЛЕММА 3$'$. *Пусть задана функция $\Phi \in \mathring{W}^3$ и множество $F \subset I$. Если $\Phi''(x) = 0$ при $x \in F$, то многочлен*

$$\tilde{D}_n(x,\Phi) = \int_{-1}^{1} (\Phi(y) - \tilde{\mathscr{L}}(y,\Phi))\,\mathscr{D}_n(y,x)\,dy + \tilde{\mathscr{L}}(x,\Phi)$$

приближает функцию Φ и ее производную так, что

$$|\Phi(x) - \tilde{D}_n(x,\Phi)| \leqslant \tilde{C}_{11} n^{-3}, \quad x \in I,$$

$$|\Phi''(x) - \tilde{D}_n''(x,\Phi)| \leqslant \tilde{C}_{11} n^{-3}\Delta^{-2}\left(\frac{\Delta}{\operatorname{dist}(x, I\setminus F)+\Delta}\right)^{34},$$

$$x \in I \setminus (I_1 \cup I_n),$$

$$\tilde{D}_n''(x,\Phi) \geqslant -C_{25} n, \quad x \in I.$$

ЛЕММА 4$'$. *Пусть заданы функция $g \in \mathring{W}^3$ и отрезок $I_j (I_j \cap (I_1 \cup I_n) = \varnothing)$. Если найдется такая точка $\tilde{x} \in I_j$, в которой $|g''(\tilde{x})| \leqslant n^{-3}\Delta_n^{-2}(\tilde{x})$, то $|g''(x)| \leqslant \tilde{C}_{13} n^{-3}\Delta^{-2}$ и при всех $x \in I_j$.*

Определение 1 и 2 оставим без изменений с заменой C_i на $\tilde{C}_i$.

ЛЕММА 5$'$. *Отрезками третьего типа могут быть только I_1 и I_n.*

ЛЕММА 6$'$. *Функции g_1 и g_2 неотрицательны, и справедливы оценки*

$$|g_1(x)| \leqslant \tilde{C}_{16} n^{-3}\Delta^{-2}, \quad x \in I \setminus (I_1 \cup I_n);$$

$$|g_2'(x)(1-x^2)^{3/2}| \leqslant \tilde{C}_{17}, \quad x \in I.$$

ЛЕММА 7'. *При каждом $n_1 \geqslant n$ многочлен $\tilde{D}_{n_1}(x, f_2)$ имеет свойства*

$$|f_2(x) - \tilde{D}_{n_1}(x, f_2)| \leqslant \tilde{C}_{22} n^{-3}, \quad x \in I,$$

$$\tilde{D}''_{n_1}(x, f_2) \geqslant -\tilde{C}_{23} n_1^{-3} \Delta_{n_1}^{-r}(x) \left(\frac{\Delta}{\operatorname{dist}(x, \bar{E}_2) + \Delta} \right)^{34},$$

$$x \in I \setminus (\bar{E}_2 \cup I_1 \cup I_n),$$

$$\tilde{D}_{n_1}''(x, f_2) \geqslant (\tilde{C}_4 + \tilde{C}_5) n^{-3} \Delta^{-2} - \tilde{C}_{23} n_1^{-3} \Delta_{n_1}^{-2}(x), \quad x \in \bar{E}_2 \setminus (I_1 \cup I_n),$$

$$\tilde{D}_{n_1}''(x, f_2) \geqslant -C_{25} n_1, \quad x \in I_1 \cup I_n.$$

Аналогично п. 3 несложно показать, что существует такое n_1 (например, $n_1 = [10^{225} \tilde{C}_{23} C_5^{-1}] n$), что многочлен $\tilde{P}_{n_1}(x) := \bar{Q}_n(x, \bar{E}_2) + \tilde{D}_{n_1}(x, f_2) + R_n(x, f_1)$ имеет свойства

$$|f(x) - \tilde{P}_{n_1}(x)| \leqslant \tilde{C}_{24} n^{-3}, \quad x \in I;$$

$$\tilde{P}_{n_1}''(x) \geqslant 0, \quad x \in I \setminus (I_1 \cup I_n);$$

$$\tilde{P}_{n_1}''(x) \geqslant -(\tilde{C}_4 + C_{25}) n_1, \quad x \in I_1 \cup I_n.$$

ЛЕММА 8. *Для алгебраического многочлена степени $\leqslant 5n$*

$$Q_n(x) := \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{y} \left(\sin \frac{n}{2} \arccos t / \sin \frac{1}{2} \arccos t \right)^{10} n^{-10} \, dt \, dy$$

имеют место неравенства

$$\bar{Q}_n''(x) \geqslant 0, \quad x \in I; \quad 0 \leqslant Q_n(x) \leqslant 2 \cdot 10^4 n^{-4}, \quad x \in I;$$

$$Q_n''(x) > \left(\frac{2}{\pi} \right)^{10} > 2^{-10}, \quad x \in I_1.$$

Окончательно получаем, что многочлен

$$\tilde{\tilde{P}}_{n_1}(x) := \tilde{P}_{n_1}(x) + (\tilde{C}_4 + C_{25}) 2^{10} [10^{225} \tilde{C}_{23} \tilde{C}_5^{-1}] n (Q_n(x) + Q_n(-x))$$

является выпуклым на I, для него имеет место неравенство (0.2).

Итак, для $r=3$ и $n > C_{26}$ теорема 1 доказана. Для остальных n доказательство вытекает из случая $n=2$, в котором достаточно положить $\tilde{P}_2(x) := \widetilde{\mathscr{L}}(x, f)$.

5. Доказательство теоремы 2. Предположим от противного, что теорема 2 неверна. Тогда

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad \exists C_0 \in \mathbf{R}, \quad C_0 > 1 : \forall f \in \mathring{W}^4, \quad f'' > 0 \, \exists P_n, \quad P_n'' \geqslant 0;$$

$$|f(x) - P_n(x)| < C_0, \quad x \in I.$$

Хорошо известно, что неравенство $|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i| \leqslant 1$, $x \in I$, влечет оценку

$$|a_i| < M_1, \quad M_1 = M(n) = \text{const}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{5.1}$$

Пусть функция f_b такова, что ее производная $f_b''(x)=-bx+b-\ln b-\ln(1-x)$, где $b=2\exp 8nM_1C_0$. Очевидно, что $f_b/4\in \mathring{W}^4$ и $f_b''(x)>0$, $x\in I$. Пусть многочлен $P_n=P_n(x)$ такой, что $P_n''(x)=\sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$. Тогда

$$|f(x)-P_n(x)|=\left|\sum_{k=2}^{n-2} a_k\left(\frac{x^{k+2}-(-1)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}-(-1)^{k+1}(x+1)\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{x^3+1}{6}-x-1\right)(a_1+b)+\left(\frac{x^2-1}{2}+x+1\right)(a_0-b+\ln b)+$$

$$\left.+M_2x+M_3+\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\ln(1-z)\,dz\,dy\right|<C_0,\qquad x\in I.$$

Теперь из (5.1) и неравенства $\left|\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\ln(1-z)dzdy\right|<7$, $x\in I$, имеем

$$|a_i|<8M_1C_0,\ i=\overline{2,n-2};$$

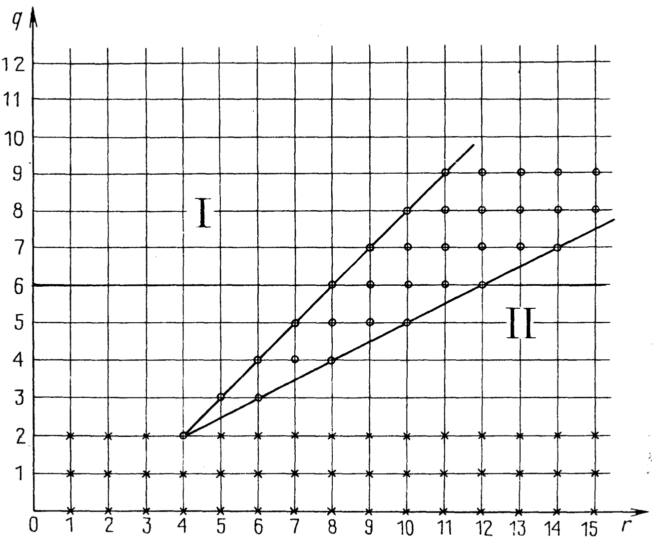
$$|a_1+b|<8M_1C_0;\qquad |a_0-b+\ln b|<8M_1C_0.$$

Откуда

$$P_n''(1)=\sum_{i=0}^{n-2} a_i<(n-1)M_1C_0\cdot 8-\ln b<0.$$

Получили противоречие, что доказывает истинность теоремы 2.

Способ доказательства теоремы 2 позволяет обобщить ее для классов Δ^q, $q>2$, функций $f\in C(I)$ таких, что $\Delta_h^q(f,x)\geqslant 0$, $x\in I$, где



$\Delta_h^q(f,x)$ — q-я разность функции f с шагом h (отметим, что Δ^1 — множество неубывающих на I функций; Δ^2 — множество выпуклых на I функций). Для этого достаточно рассмотреть функцию f_b, q-я производная которой имеет вид

$$f_b^{(q)}(x) = -bx + b - \ln b - \ln(1-x), \quad x \in I,$$

и выполняются неравенства $r-q \geqslant 2$ и $r/2 \geqslant r-q$, т. е. аналог теоремы 1 для Δ^q, $q \geqslant 2$, не выполняется при $r = \overline{q+2, 2q}$ (см. рисунок). Области I и II пока еще не исследованы.

Автор выражает признательность И. А. Шевчуку за постановку темы и полезные обсуждения.

Киевский государственный
университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило
24.06.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag. New York. Berlin. 1987. V. 9.

[2] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

[3] Leviatan D. Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 98, N 3.

[4] Дзюбенко Г. А., Листопад В. В., Шевчук И. А. Приближение функции с ухудшающейся гладкостью на концах отрезка // Тезисы докладов республиканской научной конференции. Экстремальные задачи теории приближения и их приложения (29–31 мая 1990 года). Киев, 1990. С. 50.

[5] Шевчук И. А. О коприближении монотонных функций // ДАН СССР 1989. Т. 308, № 3. С. 537–541.

[6] Шевчук И. А. Комонотонное приближение и многочленные ядра Дзядыка / Препринт АН УССР. Институт математики; 89.10. Киев, 1989.

[7] Мания С. П., Шевчук И. А. Ковыпуклое приближение функций класса W^r, $r>2$ // Тезисы докладов республиканской научной конференции. Экстремальные задачи теории приближения и их приложения (29–31 мая 1990 года). Киев, 1990. С. 87.