

Instructions: Find the reduced row echelon form of each of the following matrices

1.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \\ -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

11.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

16.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

18.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

23.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

24.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

25.

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solutions:

1.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -\frac{1}{9}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \\ -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \\ -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \\ 0 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -\frac{1}{12}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 6R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{6}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 9R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow -\frac{1}{7}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 6R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 18R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 4R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{2}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{3}R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{3}R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + \frac{1}{3}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{2}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{6}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{21}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 12R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 13 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{13}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{15}{13} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 5R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{13} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{15}{13} & 0 \end{bmatrix}$$

11.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{-1}{2}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -14 \\ 0 & -2 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -13 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 4R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 7R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 9R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{17}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 5R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 7R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{2}{3}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & \frac{-10}{3} & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & \frac{-10}{3} & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 18 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & \frac{-10}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 18 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 5R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 18R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-65}{6} & \frac{-13}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 39 & 21 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{39}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-65}{6} & \frac{-13}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{13} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{65}{6}R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{13} \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 4R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 12R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 5R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{35}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 12R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 16R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

18.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 4R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{19}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 11R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 5R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 4R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{4}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow \frac{1}{29}R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 7R_4$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 5R_4$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow \frac{-1}{5}R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 6R_4$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 15R_4$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 7R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{-1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{3}R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{2}{3}R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{10}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

24.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

25.

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -12 & -5 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{12}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 7R_2$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{12} \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-2}{3}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{12} \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{13}{12}R_3$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{12}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$