

Instructions: Find the row echelon form of each of the following matrices

1.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

11.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

16.

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

18.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

23.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

24.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

25.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Solutions:

1.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{6}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 17R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{8}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{5}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{-1}{2}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 7 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 7R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-31}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-3}{31}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{31} \end{bmatrix}$$

7.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{5}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-7}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{2}{5}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{5} \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{6}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 5R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow \frac{3}{49}R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{5}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{7}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 8R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{6}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 4R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow -\frac{1}{4}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -\frac{1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 6R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow -\frac{1}{18}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 6R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 5R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -22 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow -\frac{1}{8}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -22 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 22R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow \frac{2}{23}R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -\frac{1}{2}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & -3 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -\frac{2}{7}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & \frac{5}{2} & -3 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{5}{2}R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - \frac{5}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow -\frac{1}{3}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow -\frac{7}{11}R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow 1R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16.

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{-1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{8}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 6R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{-1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{4}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 7R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-23}{4} \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow \frac{-4}{23}R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow \frac{-1}{6}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 9R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{2}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{5}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 5R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{5}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \frac{-1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

24.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 5R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{9}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{-1}{9}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 42R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$